RİJİT CİSİMLERDE KÜTLE VE KÜTLE DAĞILIMI

Bir rijit cisim, V hacmi boyunca dağılmış olan dm kütle elemanlarının oluşturduğu bir bütündür. Her hacim elemanında, elemanter kütlenin elemanter hacime oranına yoğunluk adı verilir.

- $\rho = dm/dV$

Yoğunluk cisim içerisinde noktadan noktaya değişebilir ($\rho = \rho(x,y,z)$). Bu durumda cismin *heterojen* bir cisim olduğu söylenir. Özel olarak yoğunluğun cisim boyunca sabit olması halinde ise *homojen* bir cisimden söz edilir aşağıdaki şekilde hesaplanan m skaleri rijit cismin kütlesi adını alır. ro sabit olacağından entegral alındığında ;

$$m = \int dm = \int \rho dv = \rho V$$

RİJİT CİSİMLERDE KÜTLE VE KÜTLE DAĞILIMI



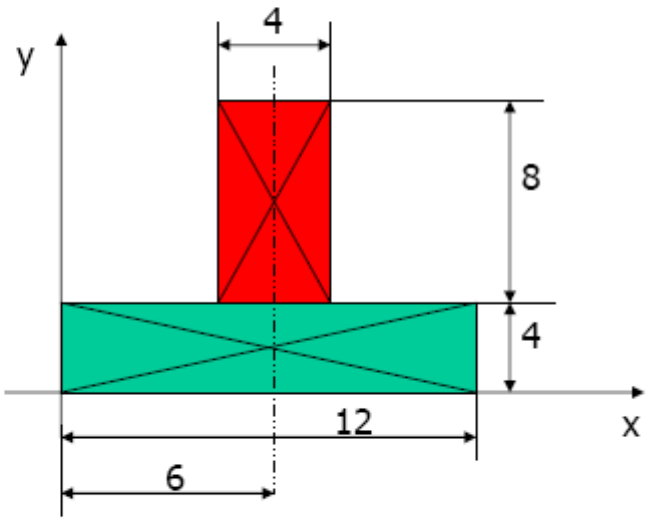
$$m = \int_D dm = \sum_{i=1}^{n} dm_i = \int_D \rho dv \Rightarrow \rho = \frac{dm}{dv}$$

Cisim homojen ise m=ρV

RİJİT CİSMİN KÜTLE MERKEZİ

- Rijit cismin, yer vektörü (entegraller cismin uzama boyunca alınmak üzere)
- $S=(\int r\, dm)/(\int dm) = 1/m \int r\, dm$
- Şeklinde tanımlanan S noktasına dijit cismin kütle merkezi adı verilir. Bu vektörsel denklem yerine, istenirse, kütle merkezinin koordinatlarını veren
- $xs=(1/m) \int x\, dm$; $ys=(1/m) \int y\, dm$ $zs=(1/m) \int z\, dm$
- skaler bağıntılarıma yazılabilir.

RİJİT CİSMİN KÜTLE MERKEZİ



$m = \rho V$

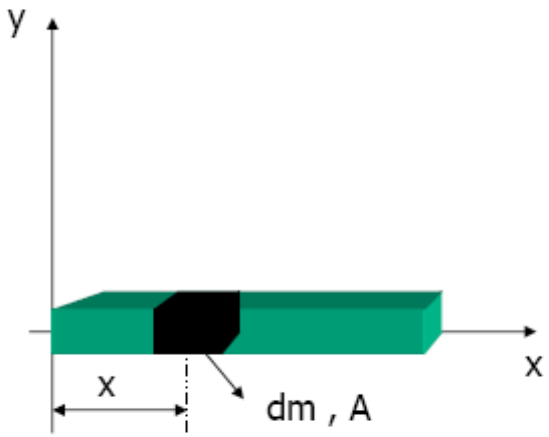
$V = (4 \times 12) + (8 \times 4) = 80$

$m = 80 . 1 = 80\ [m^3 \times kg/m^3] = 80\ kg$

$x_s = (1/80)(6x48 + 6x32) = 6$

$Y_s = (1/80)(2x48 + 8x32) = 4{,}4$

RİJİT CİSMİN KÜTLE MERKEZİ



$$x_s = \frac{1}{m}\int_0^L x\,dm \qquad dm = \rho dV$$

$$dv = A.dx \Rightarrow dm = \rho.A.dx$$

$$x_s = \frac{1}{m}\int_0^L x\,dx = \frac{\rho.A}{m}\left(\frac{x^2}{2}\right)I_0^L$$

$$x_s = \frac{\rho.A}{m}.\frac{L^2}{2} = \rho\frac{v}{L.m}.\frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}$$

RİJİT CİSMİN EYLEMSİZLİK TANSÖRÜ

- Rijit cisimlerin kütle dağılımının kinetik bakımdan önem taşıyan özelliklerine ilişkin bilgiler, eylemsizlik tansörü adı verilen bir I tansörü ile ifade edilebilir. Bu matrisin köşegenini oluşturan ifadelere eylemsizlik momenti (atalet momenti) $I_{\beta\beta}$ adı verilir. Köşegen dışı elemanlar ise atalet çarpımı olarak adlandırılır ve tümü aşağıdaki gibi hesaplanır.

RİJİT CİSMİN EYLEMSİZLİK TANSÖRÜ

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

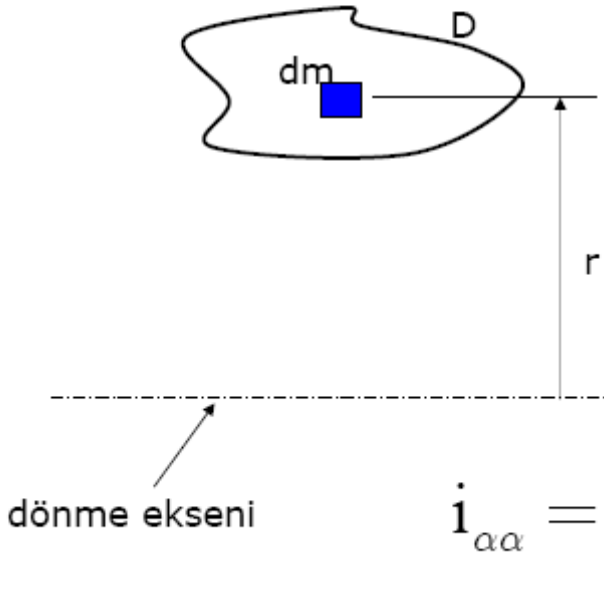
$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2)\,dm \qquad I_{xy} = I_{yx} = \int xy\,dm$$

$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2)\,dm \qquad I_{xz} = I_{zx} = \int xz\,dm$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2)\,dm \qquad I_{yz} = I_{zy} = \int yz\,dm$$

Kütle ve Atalet Elemanları

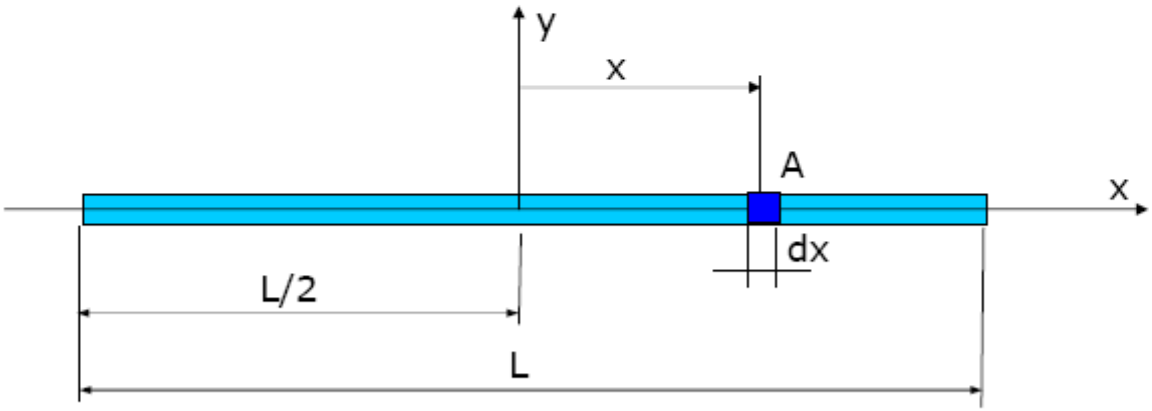
Bir cismin bir dönme eksenine göre kütlesel atalet momentinin tanımı:



$$J = \int_D r^2 \, dm$$

$$i_{\alpha\alpha} = \sqrt{\frac{I_{\alpha\alpha}}{m}}$$ atalet yarıçapı

Problem: Orta noktasından mafsallı ve sabit kesitli bir çubuğun kütlesel atalet momentinin bulunması



ÇÖZÜM:

Elemanter hacim $dV=A\,dx$

Elemanter kütle $dm=\rho\,dV$

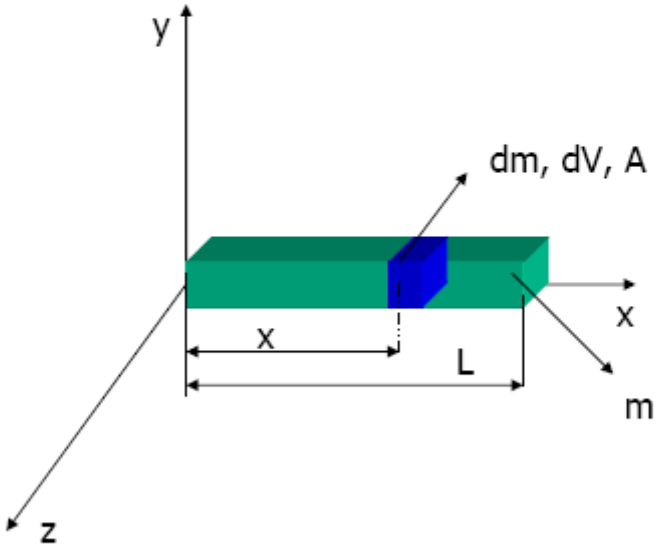
Kütlesel atalet momentinin tanımından $J=\oint_D r^2 dm$

$$J=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho\, A\, x^2 dx=\rho\, A \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx$$

$$J=\rho\, A \left|\frac{x^3}{3}\right|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{1}{12}\rho\, A\, L^3$$ bulunur.

burada, $m=\rho\, A\, L \quad \Rightarrow \quad J=\frac{1}{12} m\, L^2$

Problem: Bir ucundan mafsallı ve sabit kesitli bir çubuğun kütlesel atalet momentinin bulunması



$$I = J = \int_0^L x^2 \, dm \qquad dm = \rho \, dV = \rho A \, dx$$

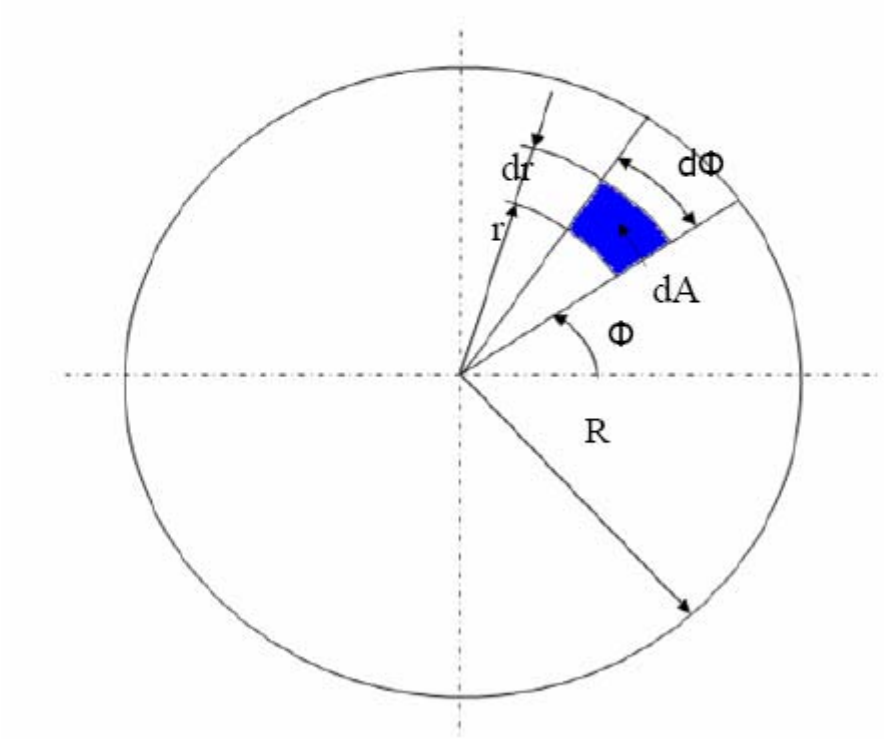
$$I = \int_0^L x^2 . \rho A \, dx = \rho A \frac{x^3}{3}\Big|_0^L = \rho A \frac{L^3}{3}$$

$$m = \rho V = \rho A L$$

$$I = J = \frac{1}{3} m L^2$$

Sabit kesitli homojen çubuğun uç noktasından dönmesinden kaynaklanan atalet momenti

Problem: Bir diskin dönme eksenine göre kütlesel atalet momentinin bulunması.





Çözüm:

Elemanter alan $dA=r.\sin d\theta.dr$

Elemanter hacim $dV=L.dA=L.\ r.\ \sin d\theta.dr$

Elemanter kütle $dm=\rho.dV=\rho.L.r.\sin d\theta.dr$

$\sin\ d\theta \cong d\theta \quad \Rightarrow \quad dm=\rho.Lr.d\theta.dr$ bulunur.

$$J=\oint_D r^2 dm=\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \rho.L.r^3.d\theta.dr=\frac{1}{2}\rho.L.\pi.R^4$$

$$m=\rho.V=\rho.\pi.R^2.L \quad \Rightarrow \quad \boxed{J=\frac{1}{2}m.R^2}$$

RİJİT CİSİMLERİN BİR EŞDEĞER MADDESEL NOKTALAR SİSTEMİNE İNDİRGENMESİ

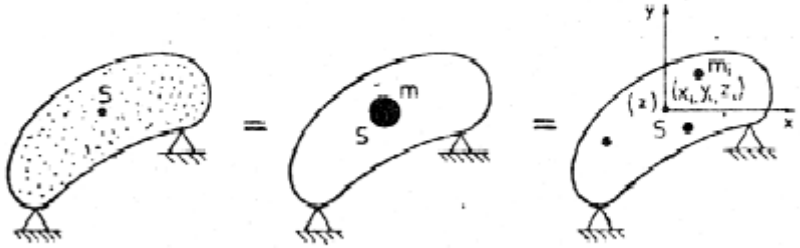
- **Maddesel nokta(noktasal kütleler) :** Mekanikte her cisim zihnen maddesel noktalara ayrılabilir yani noktasal kütlelerden meydana gelmiştir.

- **Böyle noktasal kütlelerden oluşan topluluğa maddesel noktalar sistemi veya kısaca maddesel sistem veya *mekanik sistem* adı verilir.**

Eşdeğer Noktasal Kütleler Teorisi

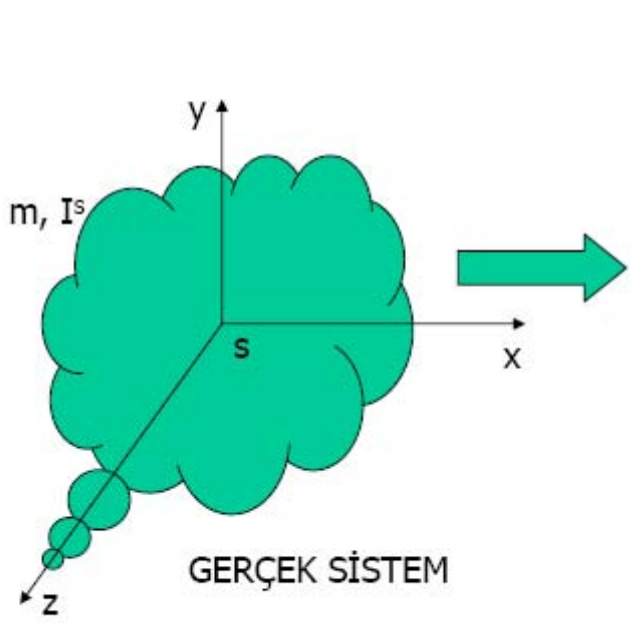
Rijit cismin eylemsizlik özelliklerini tanımlamak için kütlesi, kütle merkezi ve eylemsizlik tensörünü vermek yeterlidir. Kütlesi, kütle merkezi, eylemsizlik tensörü birbirinin aynı olan iki rijit cisim dinamik bakımdan aynı özelliklere sahiptir. Makine dinamiği problemlerinde bu özellikten yararlanarak bir rijit cismin yerine, birbirine hayali bağlarla bağlı bir dizi maddesel noktanın oluşturduğu bir sisteme geçilebilir. Buna rijit cismin bir eşdeğer maddesel noktalar sistemine indirgenmesi denir.

Bu uygulama özellikle söz konusu maddesel noktaların arzu edilen uygun yerlere yerleştirilebilmesi halinde yarar sağlar.

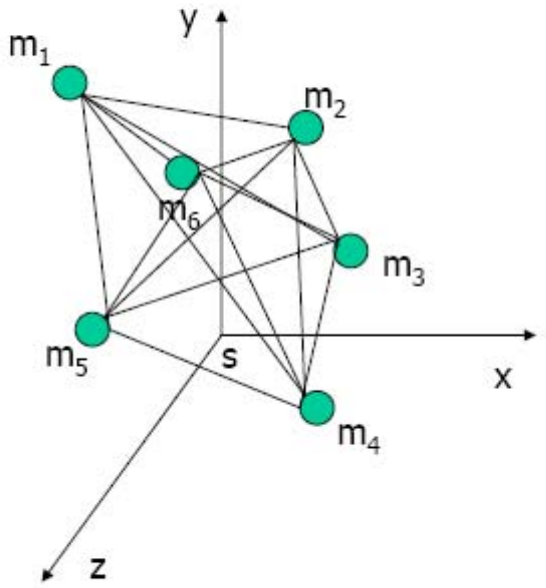


Şekil 2.20. Katı cismin kütlesinin noktasal kütlelere indirgenmesi

Rijit cismin bir eşdeğer maddesel noktalar sistemine indirgenmesi



GERÇEK SİSTEM



İNDİRGENMİŞ SİSTEM

Rijit cismin bir eşdeğer maddesel noktalar sistemine indirgenmesi

Her cismin kütlesi bulunur.

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = m$$

Her cismin ağırlık merkezi bulunur.

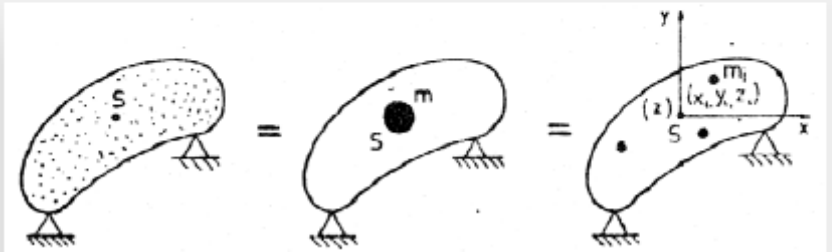
$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = 0, \sum_{i=1}^{n} m_i y_i = 0, \sum_{i=1}^{n} m_i z_i = 0 \quad .$$

Her cismin kütlesel atalet momenti bulunur

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2) = I_x^s, \ \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + z_i^2) = I_y^s, \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2) = I_z^s$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i) = I_{xy}^s = 0, \ \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i = I_{xz}^s = 0, \ \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i = I_{yz}^s = 0$$

Eşdeğer Noktasal Kütleler Teorisi



Şekil 2.20. Katı cismin kütlesinin noktasal kütlelere indirgenmesi

Şart denklemleri

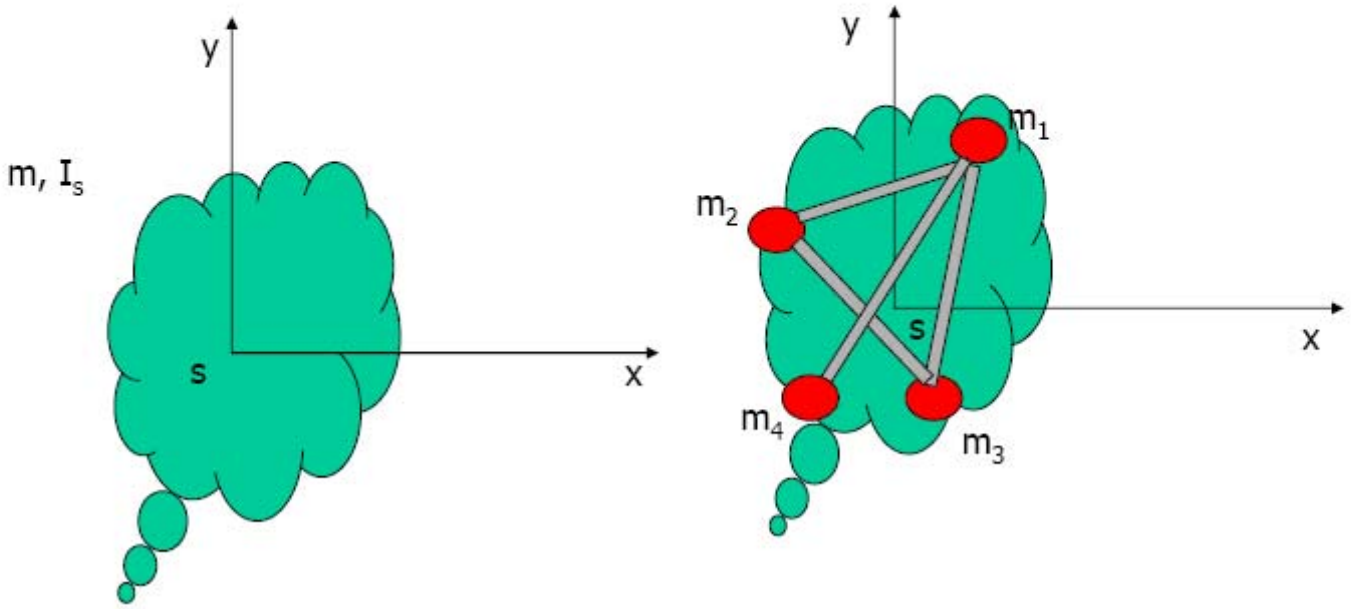
$$\sum_{i=1}^{n} m_i = m, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i z_i = 0,$$

Düzlemsel hareket yapan cisimlerin maddesel noktalara indirgenmesi

- Hareketli makine uzuvları çoğunlukla düzlem üzerinde hareket ettiği için bu özel hali inceleyelim. Bir dijit cismin bütün noktalarının yörüngeleri birbirine paralel düzlemler içinde kalacak şekilde hareket ediyorsa bu cismin *düzlemsel hareket* yaptığı söylenir.

- Düzlemsel hareket yapan bir cisim düzlem içerisinde yer alacak bir dizi maddesel noktaya aşağıdaki şekil ve formülasyonla indirgenebilir.

Düzlemsel hareket yapan cisimlerin maddesel noktalara indirgenmesi



Düzlemsel hareket yapan cisimlerin maddesel noktalara indirgenmesi

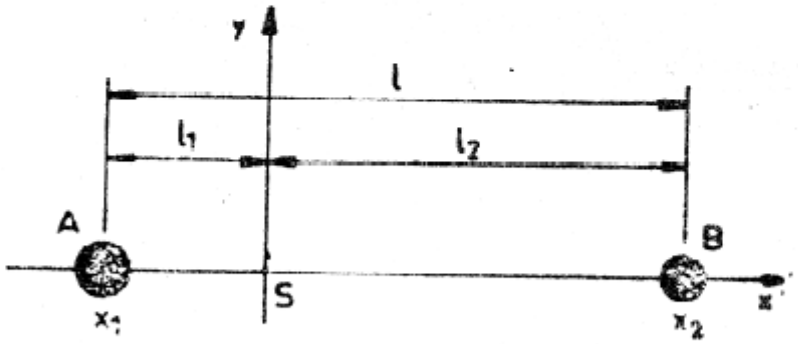
$$\sum_{i=1}^{n} m_i = m$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i y_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2) = I_z^s = m i_s^2$$

$$i_s^2 = \frac{\text{I(atalet momenti)}}{\text{m(kütle)}}$$

Düzlemsel hareket yapan cisimlerin maddesel noktalara indirgenmesi



Şekil 2.21. İki noktaya indirgeme

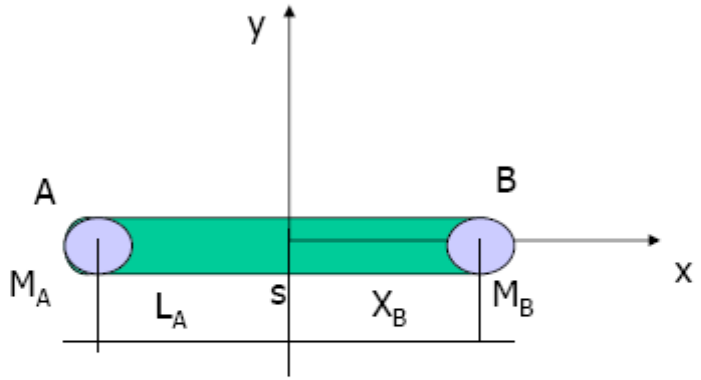
$$\sum_{i=1}^{n} m_i = m$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i y_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2) = m i_s^2$$

örnek : iki noktaya indirgeme



Bilinmeyenler = x_A, y_A , m_A ; x_B , y_B, m_B

N=2 adet noktaya indirgenecek

3 x n = 3 x 2 = 6 adet bilinmeyen vardır.

Bilinmeyenlerden herhangi ikisini biz seçebiliriz. $x_A=-L_A$; $y_A=0$

Düzlemsel hareket yapan cisimlerin maddesel noktalara indirgenmesi
örnek :

$$1-)\ m_A + m_B = m$$

$$2-)\ -m_A L_A + m_B x_B = 0$$

$$3-)\ m_A.0 + m_B y_B = 0$$

$$4-)\ m_A[(-L_A)^2 + 0] + m_B(x_B^2 + y_B^2) = mi_s^2$$

•Yukarıdaki denklemler kullanılarak M_A, M_B, Y_B, ve X_B aşağıdaki gibi bulunur.

Düzlemsel hareket yapan cisimlerin maddesel noktalara indirgenmesi

örnek :

$$y_B = 0$$

$$x_B = L_B = \frac{i_s^2}{L_A}$$

$$m_A = \frac{L_B}{L_A + L_B} m = \frac{L_B}{L} m$$

$$m_B = \frac{L_A}{L_A + L_B} m = \frac{L_A}{L} m$$

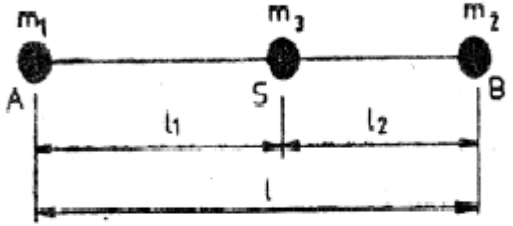
Hesaplanır. Buna göre düzlemsel hareket yapan bir dijit cismi, kütle merkezinden geçen bir doğru üzerine her biri kütle merkezinin bir yanında kalacak şekilde yerleştirilecek iki maddesel noktadan oluşan bir maddesel noktalar sistemine indirgenebileceği anlaşılmaktadır. Bu indirgemede noktalardan birinin konumu keyfi seçilirse diğerinin konumu ve indirgeme kütleleri yukarıdaki son iki formülle hesaplanabilir.

$$m_1 + m_2 = m,$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0,$$

$$m_1 . 0 + m_2 . y_2 = 0,$$

$$m_1 x_1^2 + m_2 (x_2^2 + y_2^2) = m i_s^2$$



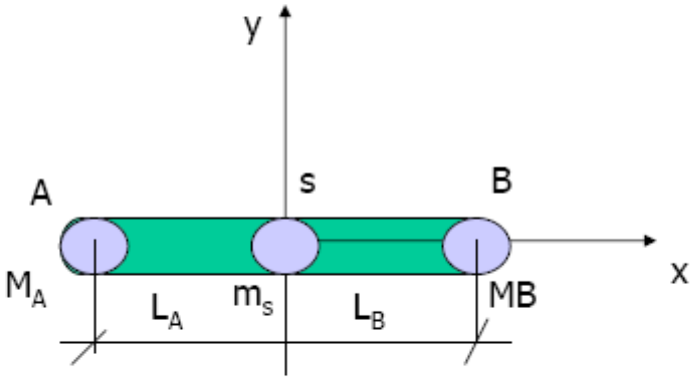
Şekil 2.25. A, B ve S noktalarına indirgeme

Bu denklemlerden

$$m_1 = \frac{m\, i_s^2}{l_1 l}, \qquad m_2 = m \frac{i_s^2}{l_2 l}, \qquad m_3 = m \left(1 - \frac{i_s^2}{l_1 l_2}\right)$$

Düzlemsel hareket yapan cisimlerin maddesel noktalara indirgenmesi

örnek : Üç noktaya indirgeme



Düzlemsel hareket yapan cisimlerin maddesel noktalara indirgenmesi

örnek : Üç noktaya indirgeme

İndirgeme noktaları A,B, ve cismin kütle merkezi

S olsun Problemin M_A, X_A,Y_A, M_B,Y_B, X_B , M_s,Y_s, X_s, şeklindeki bilinmeyenlerin

- s= 3 x 3 -4 = 5 tanesi keyfi olarak seçilebilir.
- İndirgeme noktalarından birinin S olarak seçilmesiyle zaten $x_S=0$, $y_S=0$ şeklinde iki keyfi seçim yapılmış durumdadır. Buna ek olarak
- $x_A=-L_A$, $y_A=0$, $x_B=L_B$ seçimlerini yapalım

Düzlemsel hareket yapan cisimlerin maddesel noktalara indirgenmesi

örnek : Üç noktaya indirgeme

$$m_A + m_B + m_S = m$$

$$-m_A L_A + m_B L_B = 0$$

$$m_B y_B = 0$$

$$m_A L_A^2 + m_B (L_B^2 + y_B^2) = m i_s^2$$

Elde edilir. Bu denklemlerde bilinmeyenler olan Y_B, M_A, M_B, M_s bilinmeyenleri çözülmesiyle ;

Düzlemsel hareket yapan cisimlerin maddesel noktalara indirgenmesi

örnek : Üç noktaya indirgeme

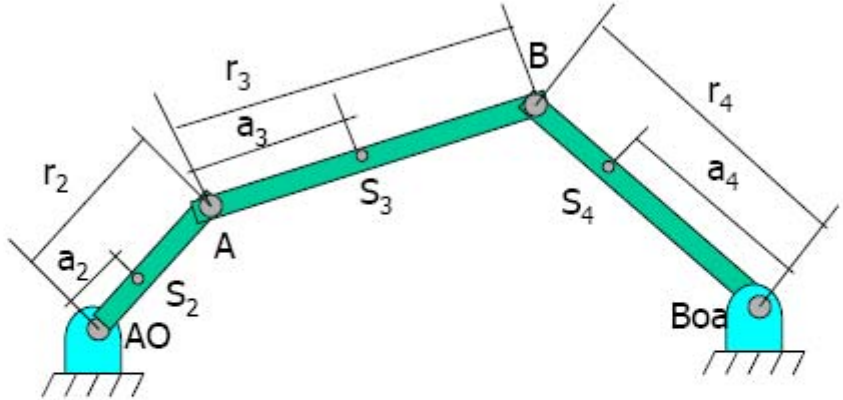
$$y_B = 0$$

$$m_A = \frac{i_s^2}{L_A(L_A + L_B)} m = \frac{i_s^2}{L_A L} m$$

$$m_B = \frac{i_s^2}{L_B(L_A + L_B)} m = \frac{i_s^2}{L_B L} m$$

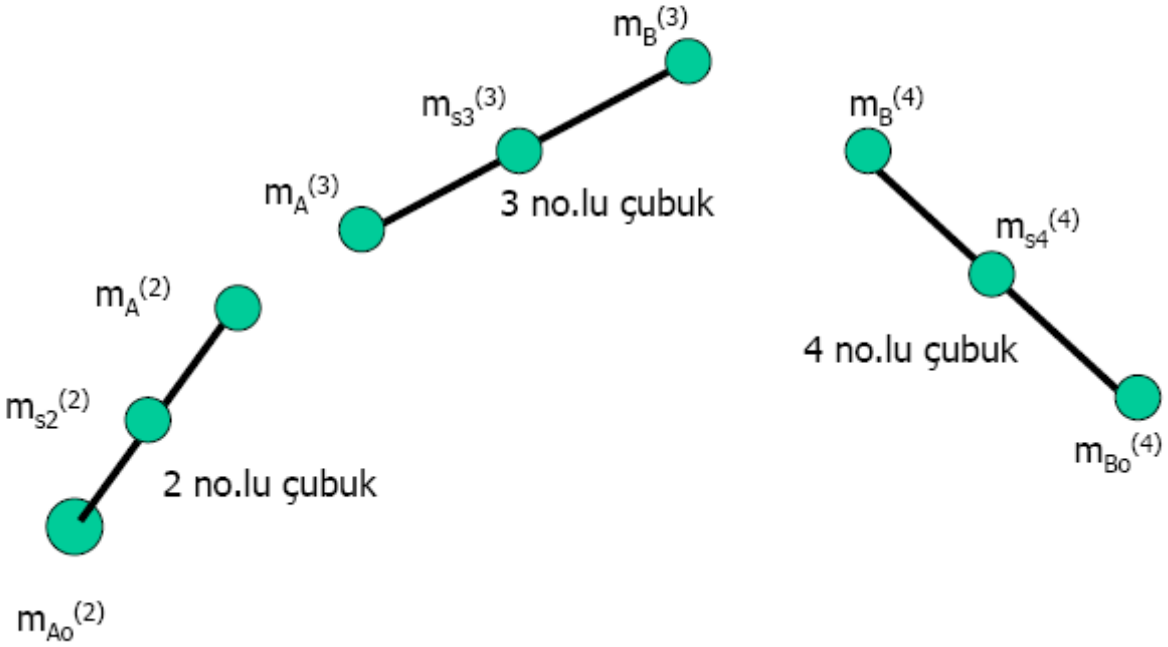
$$m_s = \left[1 - \frac{i_s^2}{L_A L_B} \right]$$

Örnek Problem



Şekildeki üç çubuk mekanizmasında;
r_2 =50 mm, r_3 = 200 mm, r_4=150 mm,
a_2 =25 mm, a_3 = 100 mm, a_4=50 mm,
m_2=0,1 kg , m_3 = 0,5 kg , m_4=0,3 kg ,
i_{s2} = 20 mm; i_{s3} = 80 mm; i_{s4} = 50 mm;
Verildiğine göre mekanizmayı dinamik eşdeğer olarak S_2, A, S_3, B, S_4 noktalarına yerleştirecek maddesel noktalara indirgeyiniz ?

Çözüm ;


$m_B^{(3)}$
$m_{s3}^{(3)}$
$m_A^{(3)}$
3 no.lu çubuk
$m_A^{(2)}$
$m_{s2}^{(2)}$
2 no.lu çubuk
$m_{Ao}^{(2)}$
$m_B^{(4)}$
$m_{s4}^{(4)}$
4 no.lu çubuk
$m_{Bo}^{(4)}$

Çözüm ;
2 no.lı uzvu ele alalım

$$m_{Ao}^{2} = \frac{i_{s2}^{2}}{a_2 r_2} m_2 = \frac{20^2}{25.50} = 0,032\,kg$$

$$m_{A}^{(2)} = \frac{i_{s2}^{2}}{(r_2 - a_2) r_2} m_2 = \frac{20^2}{25.50} = 0,032\,kg$$

$$m_{s2}^{(2)} = m_2 - (m_{Ao}^{(2)} + m_B^2) = 0,1 - 2 * 0,0032 = 0,036\,kg$$

elde edilir. Benzer hesaplamaların 3,4 numaralı uzuvlar içinde yapılırsa

3 no.lı uzvu ele alalım

$$m_A^3 = \frac{i_{s3}^2}{a_3 r_3} m_3 = \frac{80^2}{100*200} = 0,16\,kg$$

$$m_B^{(3)} = \frac{i_{s3}^2}{(r_3 - a_3) r_3} m_3 = \frac{80^2}{200*100} = 0,16\,kg$$

$$m_{s3}^{(3)} = m_3 - (m_A^{(3)} + m_B^3) = 0,5 - (0,160 +, 0,160) = 0,18$$

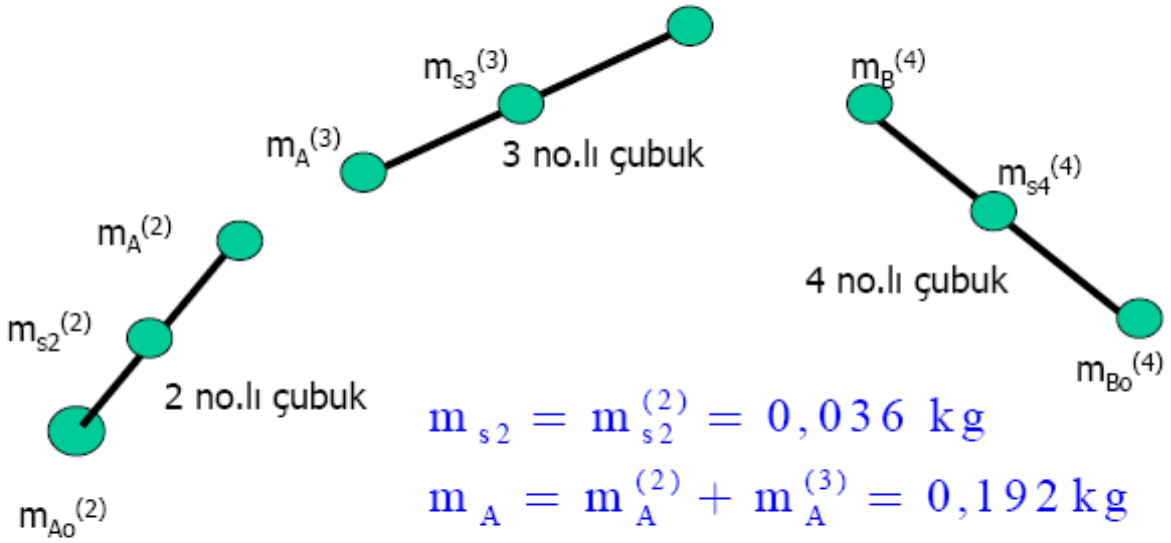
4 no.lı uzvu ele alalım

$$m_B^4 = \frac{i_{s4}^2}{a_4 r_4} m_4 = \frac{50^2}{50*150} *0,3 = 0,05\,kg$$

$$m_{Bo}^{(4)} = \frac{i_{s4}^2}{(r_4 - a_4) r_4} m_4 = \frac{50^2}{100*150} *0,3 = 0,10\,kg$$

$$m_{s4}^{(4)} = m_4 - (m_B^{(4)} + m_{Bo}^4) = 0,3 - (0,05 + 0,10) = 0,15\,kg$$

İndirgenmiş hal



$$m_{s2} = m_{s2}^{(2)} = 0,036 \text{ kg}$$

$$m_A = m_A^{(2)} + m_A^{(3)} = 0,192 \text{ kg}$$

$$m_{s3} = m_{s3}^{(3)} = 0,180 \text{ kg}$$

$$m_B = m_B^{(3)} + m_B^{(4)} = 0,210 \text{ kg}$$

$$m_{s4} = m_{s4}^{(4)} = 0,150 \text{ kg}$$

Makina Dinamiği

